

Tarea P1: Control N°2

1.

Sea  $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \arctan(x^2)$ .

(a)  $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ .

Ceros:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \arctan(x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \arctan(x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \text{Dom}(f)$ .

Así,  $f$  tiene un único cero en  $x=0$ .

Signo: Sabemos que para  $g(x) = \arctan(x)$  el signo de  $g$  es el signo de  $x$ . Así, en nuestro caso, como  $x^2 > 0$ , obtenemos que  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \text{Dom}(f)$ .

Paridad: Como  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , dado  $x \in \text{Dom}(f)$ , entonces  $-x \in \text{Dom}(f)$ .

$$f(-x) = 2 \arctan((-x)^2) = 2 \arctan(x^2) = f(x).$$

Por tanto,  $f$  es par. (De aquí en adelante se puede hacer el análisis solo para  $x > 0$ )

Continuidad: Sabemos que la función  $h(x) = \tan(x)$  es continua en su  $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ . Esto nos implica que la función  $f(x) = 2 \arctan(x^2)$  es continua en su dominio.

Derivable: Sabemos que si consideramos

$h(x) = \tan(x)$ , ella es derivable con derivada

$$h'(x) = \sec^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Con lo cual su función inversa es derivable y

$$[h^{-1}(x)]' = [\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

Por tanto,  $f(x) = 2 \arctan(x)$  es derivable en todo su dominio. y

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4x}{1+x^2}.$$

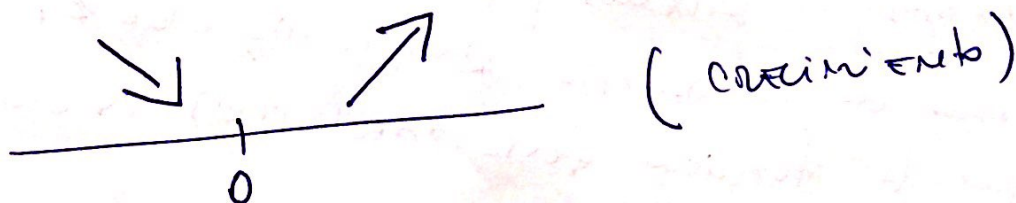
Notemos que  $f'(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , con  $q(x) \neq 0$ ,

para todo  $x \in \text{Dom}(f)$ . Luego,  $f'$  es derivable.

Repetiendo este proceso, podemos ver que  $f \in C^\infty(\text{Dom } f)$ .

(b) Ya tenemos que  $f'(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ . Así,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (\text{punto crítico})$$



$$(c) f''(x) = \frac{4(1+x^4) - 4x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{4 + 4x^4 - 16x^4}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{4 - 12x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{4(1 - 3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

Luego,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3}x^2)(1 + \sqrt{3}x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt[4]{3}x)(1 + \sqrt[4]{3}x) \underbrace{(1 + \sqrt{3}x^2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}}$$

Para analizar el signo, basta analizar el signo de  $(1 - \sqrt{3}x^2)$ . Como es una función cuadrática con el término que acompaña a  $x^2$  negativo, obtenemos que

$1 - \sqrt{3}x^2$   $\begin{cases} \text{positiva: antes de su 1º cero} \\ \text{después de su 2º cero} \\ \text{negativa: entre sus ceros.} \end{cases}$

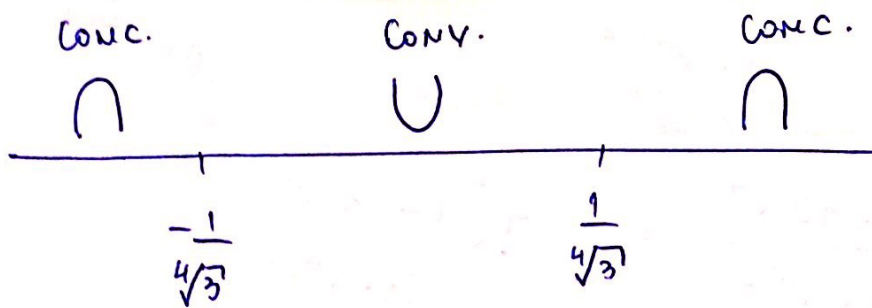
Por tanto,

$$f''(x) > 0, \quad \text{si } x \in \left] -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[$$

$$f''(x) < 0, \quad \text{si } x \in \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[ \cup \left] \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty \right[.$$

→

EM RESUMÃO

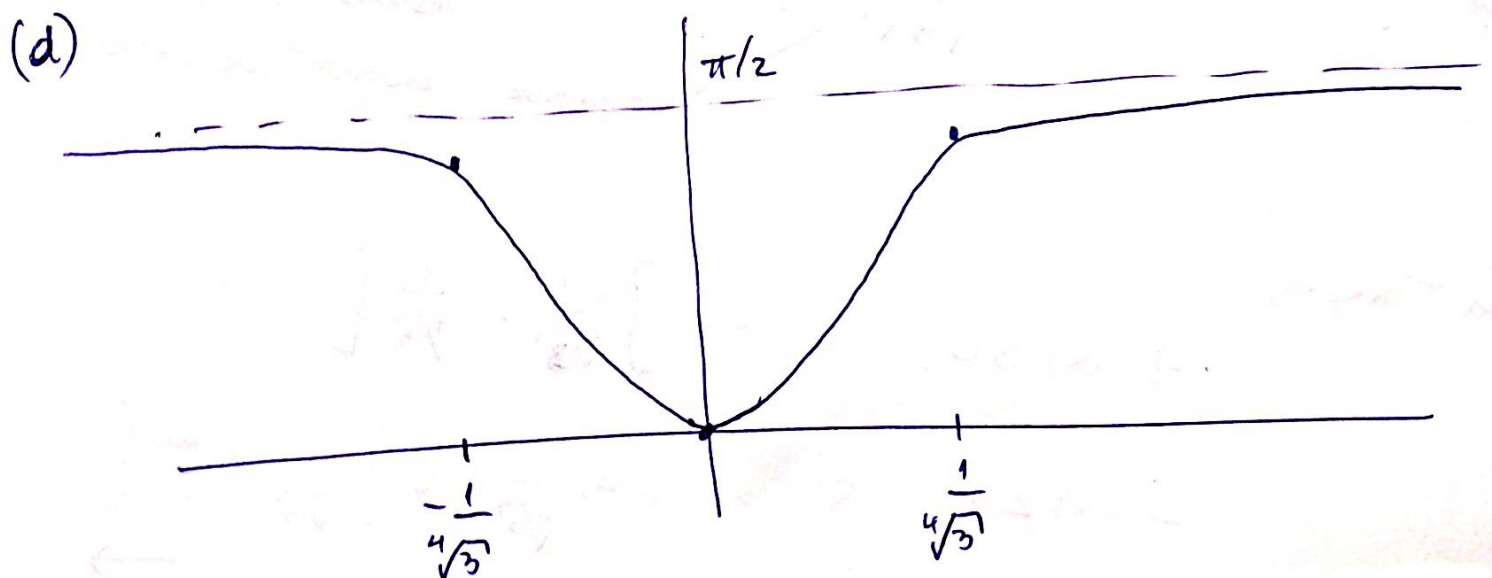


Agora, analisamos a natureza do ponto crítico encontrado em (b). ( $x_0 = 0$ ). Então

$$f''(x)|_{x_0=0} = \cancel{\frac{4}{1}} = \frac{4(1-3 \cdot 0)}{(1+0)^2} = 4 > 0.$$

Por lo tanto, em  $x_0 = 0$   $f$  alcança seu mínimo.

→ obs: Como  $f \geq 0$ , então  $x_0 = 0$  é um mínimo global de  $f$ .



Problema P3C.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$$

$$\stackrel{x=\pi}{=} \frac{1 - 1}{1 + 0 + (-1)} = \frac{0}{0}.$$

Vamos usar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} - \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)} = \frac{0}{0}.$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - \cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) - \cos(x)} = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{-2 + 1} = \frac{1}{4} //$$